A Paixão de Caraça nos *Conceitos*

Augusto J. Franco de Oliveira
Professor Emérito
Universidade de Évora
CFCUL

1 A paixão e a sua época[1]

O título desta apresentação é intencionalmente evocativo das grandes obras plásticas renascentistas ou das grandes obras musicais, como as missas de Bach e Mozart. A semelhança não é obviamente entre aquelas obras e os *Conceitos Fundamentais da Matemática* [1.ª edição, Cosmos, I Parte (Números) 1941, II Parte (Funções) 1942, I, II, e III Parte (Continuidade) 1951] de Bento de Jesus Caraça (1901–1948), mas sim a condição humana — a paixão — com que as obras foram pintadas, compostas ou escritas, independentemente das convicções religiosas ou ideológicas dos seus autores. A "paixão" de Caraça ombreia com aquelas, mas tem um cariz um pouco diferente, como adiante se perceberá.

Como ficamos a saber por uma curta nota de Guida Lami, os desenhos do livro foram feitos por ela em 1939, sendo de presumir que uma boa parte do texto já estivesse pelo menos esboçada. (Na realidade, a parte matemática já tinha sido objecto de publicação em 1935, nas *Lições* — ver adiante).

Como diz Paulo Almeida na sua "Introdução" à edição revista e engrandecida publicada pela Gradiva em 1998, p. xiv:

> *«Quando este livro foi escrito vivia-se num clima de medo generalizado em que se por um lado o Estado aterrorizava os cidadãos, por outro vivia no terrível temor de eles se libertarem. Ao carácter libertador da ciência. . . »*

Tempos conturbados, esses, que fazem lembrar em alguns aspectos outros muito mais recentes (os actuais!), mas que não demoveram nem demovem homens generosos como Bento de Jesus Caraça. Vêm à mente, por natural associação, outros textos famosos de cariz científico e cultural, não no sentido

[1] Comunicação lida na sessão "Os 70 anos dos *Conceitos Fundamentais da Matemática*", Fundação Mário Soares e Sociedade Portuguesa de Matemática, 25 de Outubro de 2012.

elitista mas no sentido da “cultura integral” de que fala Caraça, para quem a ciência e a cultura eram instrumentos de libertação e promoção dos povos. Estamos a pensar, por exemplo, nos seguintes (comparem-se as datas de publicação e as breves citações dos seus autores):

▷ Fernando de Almeida Vasconcelos. *História das Matemáticas na Antiguidade.* 1.ª edição, Aillaud e Bertrand, 1925; 2.ª edição revista e editada por AJFO, Ludos e Museu de Ciência da Univ. Lisboa, 2009.

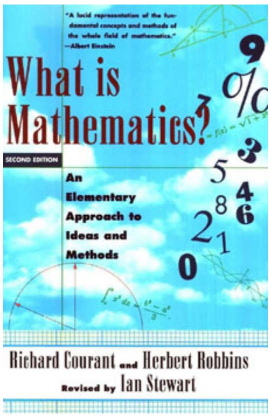
«O estudo das matemáticas adquiriu desde os tempos mais recuados, a maior importância no desenvolvimento do progresso humano, e o seu conhecimento passou logo incontestavelmente a formar, depois da cultura moral, isto é, depois da cultura do sentimento, um dos objectos essenciais da educação, tornando-se, no homem esclarecido, a base e o instrumento fundamental do seu saber.

E, de facto, todo o saber real, toda a ciência positiva, e até mesmo as artes, ou vão buscar os seus fundamentos, no todo ou em parte, aos conhecimentos matemáticos, como a Mecânica, a Astronomia, e as ciências físico-químicas, nas quais o emprego dos processos do cálculo matemático permitiu descobrir as leis do movimento e as das forças constituintes da matéria; ou, às matemáticas, ou, pelo menos, aos seus processos, estão intimamente ligadas, como sucede com as ciências histórico-naturais, a medicina, as ciências políticas e económicas, a arqueologia, a filosofia, a linguística e a glotologia, todos os ramos da arte militar, as artes liberais mecânicas e industriais, as belas artes (em tudo que não depende do sentimento e está submetido às leis da razão), a filosofia e até a teologia: ciências em que, nos métodos empregados para a aquisição de conhecimentos, se procura seguir a marcha firme e segura do geómetra.

Por isso, as matemáticas têm constituído em todos os tempos a base dos conhecimentos positivos para a inteligência humana; e ainda quando a retórica, a dialéctica, a gramática e a moral, que tão grande parte vieram a ter na cultura do espírito, estavam por nascer, já as Matemáticas e a Filosofia natural, formando a essência de todo o saber, eram ensinadas nas escolas dos mais notáveis filósofos, sendo as primeiras, com a certeza luminosa que as caracteriza, o início e a base fundamental do saber geral; donde o seu nome de *Mathesis* ou *Mathemata*, como quem diz *Ciências* (no sentido mais lato deste vocabulário), ou, ainda melhor, *Instrução.*» (p. 33, sublinhados meus)

De espectro matemático mais amplo mas escritos essencialmente com os mesmos propósitos culturais:

▷ R. Courant e J. Robbins. *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods.* ["For Lori"] Oxford University Press, 1941; second edition revised by Ian Stewart, 1996.



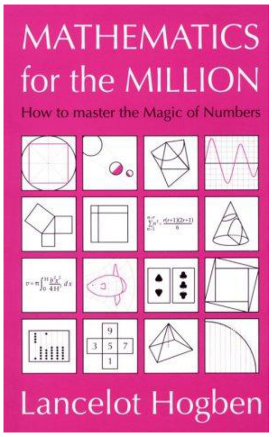
«O objectivo é a compreensão genuína da matemática como um todo orgânico e como uma base para o pensamento e a acção científicas.»[2] (Do Prefácio à 1ª edição).

Deste livro disse Einstein:

«[Este livro] é uma representação lúcida dos conceitos e métodos fundamentais de todo o campo das matemáticas. É uma introdução para o leigo facilmente compreensível e ajuda o estudante de matemáticas a ter uma visão geral dos princípios e métodos básicos»[3]. (Citado na contracapa de Courant e Robbins)

▷ Lancelot Hogben. *Mathematics for the Million.* Allen & Unwin, 1936; trad. brasileira da 2ª edição por Paulo Moreira da Silva, Roberto Bins e Henrique Carlos Pfeifer. Editora Globo, 1956.

«(. . .) Escrevi esta obra na qualidade de cidadão particular interessado no problema educacional. (. . .) Sejam quais forem as objecções levantadas contra o método adoptado e as opiniões expressas, o livro terá atingido o objectivo se estimular o interesse e remover o complexo de inferioridade de alguns dos milhões que já desistiram de aprender matemática pelos trâmites costumeiros.»



[2] «The goal is genuine comprehension of mathematics as an organic whole and as a basis for scientific thinking and acting.»

[3] «[This book is] a lucid representation of the fundamental concepts and methods of the whole field of mathematics. It is an easily understandable introduction for the layman and helps to give the mathematical student a general view of the basic principles and methods.»

Os *Conceitos* foram também precedidos por outros trabalhos académicos do próprio Caraça, onde já estão presentes algumas características que encontramos nos *Conceitos*

▷ Bento de Jesus Caraça. *Lições de Álgebra e Análise*. Bertrand, Vol. 1 (I. Números; II. Algoritmos de Simetria), 1935, Vol. 2 (Funções, Limites, Continuidade), 1940.

> «Não tive, ao redigir este livro, intuitos de originalidade mas simplesmente uma preocupação *à qual tudo foi sacrificado* — a de fazer dele um instrumento útil de trabalho, não só para aqueles que pela primeira vez abordam o estudo destas matérias e que mais não voltarão a elas (e são o maior número) como também para os que, por necessidade ou inclinação, procuram, num segundo estudo esclarecer ou aprofundar os seus conhecimentos.»

A meu ver, estes manuais universitários de Caraça excedem em excelência onde outros, em particular o seu mestre Mira Fernandes, se retraíram ou se resguardaram. Numa época de ensino elitista, Caraça correu o risco imenso de produzir uma obra de matemáticas superiores que fosse simultaneamente inteligível, motivadora, histórica e filosoficamente informada. Para isso, desafiou tanto os poderes do dia como os poderes mais ocultos e perniciosos de uma academia parada no tempo e desligada do mundo.

2 O problema e a sua abordagem

O problema de fundo subjacente aos *Conceitos* é o da continuidade, objecto do último capítulo. Para lá chegar é necessário percorrer um longo caminho de reconstrução racional, dos números às funções reais, pejado de dificuldades, avanços e recuos ao longo da história milenar da matemática. No centro das dificuldades está a própria noção de número, em particular a noção de número irracional, que só foi cabalmente esclarecida e fundamentada com rigor na segunda metade do séc. XX.

A origem histórica do problema, de um ponto de vista numérico, é a descoberta pitagórica das incomensurabilidades.

Sejam a, b grandezas da mesma espécie, por exemplo, dois segmentos (= linhas rectas, na terminologia da época), duas superfícies, dois sólidos. Dizemos que a é *comensurável* com b (ou que a e b são comensuráveis) sse existem inteiros m, n tais que $na = mb$, ou seja, equivalentemente, tais que as razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{m}{n}$ sejam proporcionais. Em notação moderna, atribuímos valores numéricos às grandezas e escrevemos, naquele caso,

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

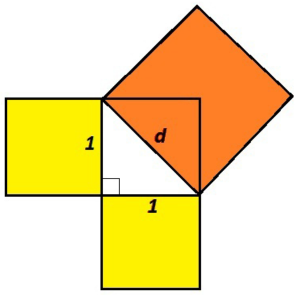
e também dizemos que a razão $\frac{a}{b}$ é *racional*. Se a não é comensurável com b dizemos que a e b são *incomensuráveis*. Em terminologia moderna, isto equivale a dizer que a razão $\frac{a}{b}$ é *irracional*.

Mais concretamente, os pitagóricos terão descoberto que a diagonal de um quadrado de lado unitário é incomensurável com o lado do quadrado. Representando por d o comprimento da diagonal, isto quer dizer que $\frac{d}{1}$, isto é, d, não é racional.

Reformulando em termos modernos, os pitagóricos sabiam também que [pelo famoso *Teorema de Pitágoras*: num triângulo rectângulo, o quadrado sobre a hipotenusa é igual (à soma de) aos quadrados sobre os catetos], aritmeticamente expresso por

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

de onde se conclui que $d = \sqrt{2}$ não é racional — é *irracional*.



Diz Caraça:

> «No dia em que foi descoberto o fenómeno da incomensurabilidade de segmentos, a escola pitagórica estava ferida de morte.» (p. 71 de *Conceitos*)

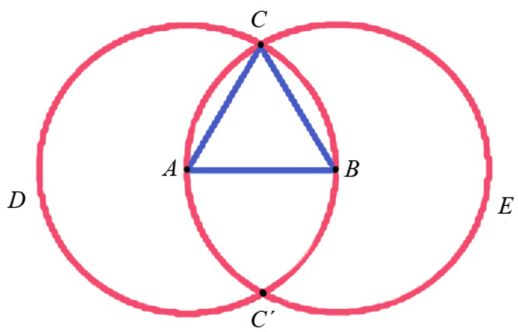
Porque a comensurabilidade era, para os pitagóricos, condição necessária da racionalidade e inteligibilidade. Mas convém não perder de vista que estamos a falar somente da *escola filosófica* e não da *escola matemática*.

Do ponto de vista da matemática, quais foram as consequências da descoberta dos incomensuráveis? Foram simplesmente (mas não imediatamente) o reconhecimento de que as demonstrações das proposições geométricas dos pitagóricos que pressupunham tacitamente a comensurabilidade estavam *incompletas*, pois lhes faltava o caso da incomensurabilidade. O obreiro desta transformação foi Eudóxio de Cnido (*c.* 410–355 a.C.), discípulo de Platão, com uma nova definição da proporcionalidade que engloba ambos os casos. Estes seus trabalhos são tratados no Livro V dos *Elementos* de Euclides e são considerados pelos historiadores modernos como dos mais importantes na evolução do conceito de número (ver adiante).

Noutra manifestação mais simples de entender, o problema da continuidade está presente logo na Proposição 1 do livro I dos *Elementos*:

Prop. I.1 *Construir um triângulo equilátero, dado um lado.*

Todos aprendemos a fazer a construção (com régua e compasso) na escola primária, ilustrada com a figura a seguir:



Dada a linha recta (= segmento) AB, com centro em A e raio AB traçamos a circunferência D, e analogamente com centro em B e raio BA traçamos a circunferência E. As circunferências D e E cortam-se exactamente em dois pontos, um dos quais é C (ver figura). Por serem raios de circunferências "iguais", AB, BC e AC são "iguais", logo o triângulo ABC é equilátero, q.e.d.

Ignoremos a linguagem construtiva do "traçar". Afinal de contas, a Geometria nos *Elementos* não é uma disciplina de desenho — as coisas podiam ser ditas de uma maneira "estática" (que Platão aprovaria), mas não é aí que reside o problema.

O problema é exactamente o da *existência* dos pontos de intersecção das duas circunferências, C e C'. Trata-se de uma questão de *continuidade* das linhas que Euclides assumiu tacitamente, como assumiu muitas outras coisas que não estão nos seus postulados nem deles são consequência. A questão, do ponto de vista geométrico, ou do equivalente ponto de vista analítico só foi completamente esclarecida e resolvida precisamente com a construção dos números reais e identificação das suas propriedades fundamentais, na segunda metade do séc. XIX.

Nas *Lições*, Caraça expõe a construção feita por Dedekind (*Continuidade e números irracionais*, 1872),[4] e menciona as de Méray-Cantor e de Weierstrass. Nos *Conceitos* é tudo mais abreviado, mas, em compensação, a exposição é enriquecida com desenvolvimentos históricos e filosóficos que são raros ou simplesmente ausentes noutros livros da época em qualquer língua.

A preferência de Caraça pela construção de Dedekind (cortes) dos números reais[5] pode talvez explicar-se pelo facto de ser muito mais "geométrica" e intuitiva do que as de outros matemáticos e, por isso, mais adequada a uma contextualização histórica e filosófica que recua aos gregos antigos, mas também mais apropriada à comparação (isomorfismo) com a recta geométrica.

Isto torna mais difícil de entender por que razão Caraça não menciona os esforços de Eudóxio a este respeito, nem nas *Lições* nem nos *Conceitos*. Pois, como diz o historiador T.L. Heath (*A History of Greek Mathematics* **I**, Oxford, 1921), a definição eudoxiana da proporcionalidade (igualdade de razões)[6]:

> «... corresponde exactamente à moderna teoria dos irracionais devida a Dedekind, e é palavra por palavra a mesma que a definição de Weierstrass da igualdade de números.»[7]

Os tratadistas mais citados e recomendados por Caraça, com respeito aos números reais e à análise real, Jules Tannery (*Introduction à la Théories des Fonctions d'Une Variable*, Vol. 1, 2.ª edição, 1904), E.W. Hobson (*The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series*, 3.ª edição, 1927) também não mencionam Eudóxio neste contexto. Será por isso que Caraça o não menciona? Uma explicação possível e mais plausível é uma espécie de preconceito doutrinário, nomeadamente o seu fascínio por e as suas ideias sobre o "primado do número" e a dificuldade em conciliá-las com o facto de as razões entre grandezas ou magnitudes geométricas do

[4]Trad. port. disponível na página `http://sites.google.com/site/tutasplace/`

[5]Preferência também de Vicente Gonçalves no *Curso de Álgebra Superior*, 1933, que fica aquém de Caraça em elegância, inteligibilidade e sentido pedagógico.

[6]Em notação moderna, a definição é: $a/b = c/d$ sse para quaisquer números naturais m, n, (i) Se $na < mb$, então $nc < md$; (ii) se $na = mb$, então $nc = md$; e (iii) se $na > mb$, então $nc > md$. Por outras palavras, $a/b = c/d$ sse para quaisquer números naturais m, n, tem-se $\frac{a}{b} >=< \frac{m}{n}$ exactamente quando $\frac{c}{d} >=< \frac{m}{n}$, respectivamente.

[7]«...corresponds exactly to the modern theory of irrationals due to Dedekind, and that it is word for word the same as Weierstrass's definition of equal numbers.»

mesmo tipo, a/b, não serem entidades com existência autónoma (só ocorrem em proporções, nunca isoladamente), menos ainda entidades numéricas.[8]

Em todo o caso, Caraça nunca perdeu de vista que estava a escrever e *explicar a matemática e os seus contextos*, e assim contribuir para a libertação e emancipação do seu povo. Este é o verdadeiro significado da sua paixão: Bento Caraça está a olhar para alto e longe, para um futuro ainda distante onde o exercício democrático faculte a todos os homens e mulheres a fruição das melhores criações da humanidade.

AJFO
Cotovia, 20 de Outubro de 2012

`francoli@kqnet.pt`

`http//sites.google.com/site/tutasplace/`

[8]Na realidade Caraça menciona Eudóxio uma vez, no final do vol. II das *Lições*, p. 197, a propósito do método de exaustão e do axioma de Eudóxio-Arquimedes. E dá como referência para coisas históricas Carl B. Boyer *The Concepts of the Calculus*, Columbia Univ. Press, 1939 (*The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover, 1959) que por sua vez cita Heath e é mais informativo sobre as proporcionalidades eudoxianas do que se depreende da leitura de Caraça. Este é sempre muito crítico do "finitismo"numérico dos gregos, e não parece ter em conta que a definição de proporcionalidade de Eudóxio extravasa esse finitismo, na medida em que envolve uma quantificação universal sobre todos os racionais positivos.